Εργασία (Ασκήσεις 45, 47, 50, 48 (έως γ), 49 (έως α), 55 (έως β))

1 Φράγμα Απορρόφησης στο α

$P(\text{απορ. στο } a) = \lim_{b\to\infty} P(\text{απορ. στο } a \text{ όταν έχω 2 φραγμ. απ. } a/-b)$

- Όταν $\mu=0$,

  $P(\text{απορ. στο } a) = \lim_{b\to\infty} \frac{b}{a+b} = 1$

- Όταν $\mu\neq 0$

  $P(\text{απορ. στο } a) = \begin{cases} \lim_{b\to\infty} \dfrac{1-e^{-S_0 b}}{e^{S_0 a}-e^{-S_0 b}} = \dfrac{1}{e^{S_0 a}}, & S_0>0 \\ \lim_{b\to\infty} \dfrac{1-e^{-S_0 b}}{e^{S_0 a}-e^{-S_0 b}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{L'Hosp.}}{=}} 1, & S_0<0 \end{cases}$

  όπου $S_0\neq 0$ και $g(S_0)=1$

Συναληθευτικά,

$$P(\text{απορ. στο } a) = \begin{cases} e^{-S_0 \cdot a}, & S_0 > 0 \\ 1, & S_0 \leq 0 \end{cases}$$

1 φράγμα Απορρόφησης στο $-b$

$P(\text{απορ. στο } -b) = \lim_{a \to \infty} P(\text{απορ. στο } a \text{ όταν έχω 2 φραγ. απ. } a / -b)$

• Όταν $\mu = 0$, $P(\text{απορ. στο } -b) = \lim_{a \to \infty} \frac{a}{a+b} = 1$

• Όταν $\mu \neq 0$, $P(\text{απορ. στο } -b) =$

$$= \lim_{a \to \infty} \frac{e^{S_0 a} - 1}{e^{S_0 a} - e^{-S_0 b}} = \begin{cases} 1, & S_0 > 0 \\ e^{S_0 b}, & S_0 < 0 \end{cases}$$

Συναληθευτικά

$$P(\text{απορ. στο } -b) = \begin{cases} e^{S_0 b}, & S_0 < 0 \\ 1, & S_0 \geq 0 \end{cases}$$

Ασκηση 45

Εστω ενας ελεύθερος απλός τυχαίος περίπατος οπου X_n περιγράφει τη θέση του περιπάτου την χρονική στιγμή της απορρόφησης των Y_i, $i=1,\dots,n$ ανεξ. & ισόνομων τμ με $E(Y_i) = \mu = 7$ και έστω τα φράγματα απορρόφησης a και $-b$ με $X_0 = 0$ η αρχή. Να βρείτε:

i) Τον μέσο χρόνο απορρόφησης $E(T) = ;$

ii) την $P(\text{απορ. στο } a)$

iii) την $P(\text{απορ. στο } -b)$.

ΛΥΣΗ

Αποδεικνύω ότι $P(\text{τελ. απορρόφησης}) = 1$

Έτσι αφού $\mu = 7 \neq 0$ $(\exists S_0 \neq 0)$ $g(S_0) = 1$

$E[g(s)^{-T} \cdot e^{S X_T}] = 1 \Rightarrow E[e^{S_0 X_T}] = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^{S_0 a} P(\underbrace{\text{τελ. απορ. στο } a}_{A}) + e^{-S_0 b} \cdot P(\underbrace{\text{τελ. απορ. στο } -b}_{1-A}) = 1$$

Στη συνέχεια, παραγωγίζουμε την $E[g(s)^{-T} \cdot e^{S X_T}] = 1$ και συνεχίζουμε όπως στη θεωρία μας

Άσκηση 47

Έστω ένας τυχαίος περίπατος $X_n = \sum Y_i$, $Y_i \sim N(10, 2^2)$

2 φράγματα απορρόφησης a και $-b$, και $X_0 = 0$

i) $E(T) = ;$, ii) P(απορ. στο a) $= ;$, iii) P(απορ. στο $-b$) $= ;$

ΛΥΣΗ

~~$\mu = 10 \neq 0$ τότε ($\exists s_0 \neq 0$) $g(s_0) = 1$~~

$g(s) = e^{\mu s + \frac{s^2 \sigma^2}{2}}$

$g(s_0) = 1 \Rightarrow e^{\mu s_0 + \frac{1}{2}\sigma^2 s_0^2} = 1 \Rightarrow s_0(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 s_0) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow s_0 = 0$ Απορ. $\underline{ή}$ $s_0 = -\frac{2\mu}{\sigma^2} \neq 0$ όταν $\mu \neq 0$

άρα $s_0 = -\frac{20}{4} = -5 < 0$

Άσκηση 48

Η P(κερδίσει 1€) $= 0{,}6 = p$
Η P(να χάσει 1€) $= 0{,}4 = q$ $\}$ $p + q = 1$

Απλός τυχαίος περίπατος δίχως αναπήδηση.

Έστω ότι αρχικά έχει b ευρώ, $b > 0$ και σταματά να παίζει όταν τα χρήματά του γίνουν a ή 0 ευρώ με $b < a$

Έστω X_n η σδ που περιγράφει το κέρδος του στο n-οστό παιχνίδι : (α) Νδο σίγουρα το παιχνίδι θα τελειώσει κάποτε

(β) Ν.Β P(κέρδος στο a) $= ;$ και συνεπώς να τελειώσει το παιχνίδι. (γ) Ποιος ο μέσος χρόνος τερματισμού του παιχνιδ.

(δ) Αν ο παίκτης είχε αρχικά απεριόριστο κεφάλαιο και τερματίζει το παιχνίδι στα 50€ , ποια η πιθανότητα P(να φθάσει στα 50€) $= ;$

(ε) Αν δεν υπάρχει απεριόριστο κεφάλαιο ποια η πιθανότητα P(να φθάσει στα -4 €) $= ;$

(στ) Να υπολογιστεί P(κέρδος 0€ σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή) $= ;$

ΛΥΣΗ

(α) P(τελ. απορρόφησης) $= 1$

(β) P(το κέρδος στο a) $= P$(τελικής απορροφ. στο a)

$\mu = E(Y_i)$ με $P(Y = y_i) = \begin{cases} 0{,}6 & , Y = +1 \\ 0{,}4 & , Y = -1 \end{cases}$

$E(Y_i) = p - q = \frac{1}{5} = 0,2 \neq 0$ άρα

$\exists\, S_0 \neq 0 : g(s_0) = 1$

$g(s) = E(e^{Ys}) = p \cdot e^{s \cdot 1} + q \cdot e^{-s}$

$g(s_0) = 1 \Rightarrow p \cdot e^{s_0} + q e^{-s_0} = 1 \Rightarrow p \cdot (e^{s_0})^2 + q - e^{s_0} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p\lambda^2 - \lambda + q = 0$

$\Delta = 1 - 4pq = (p+q)^2 - 4pq = (p-q)^2$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm |p-q|}{2p} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Είναι $\lambda = e^{s_0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = e^{s_0} \Rightarrow S_0 = 0 \quad \text{Απορ.} \\ \frac{2}{3} = e^{s_0} \Rightarrow S_0 = \ln\frac{2}{3} \quad \ldots \end{cases}$$

3) Παραγωγίζονται την ταυτότητα του Walt ...

4) Ψάχνω την P(απορ. στο S0)

Οπου $\underline{S_0 < 0}$ άρα P(απορ. στο S0) = 1

5) Ψάχνω την πιθανότητα P(απορ. στο −4)

με ανάλογο τρόπο..

6) P(κερδ. 0€ σε οποιοδήποτε) =

$$= P\left(\begin{array}{l} \text{έρθει ισοπαλία το } 1^o \text{ παιχν.} \\ \text{ή κερδ. } 1^o \text{ παιχν. και μελλοντικά επιστρέφει στο } 0€ \\ \text{ή χάνει } 1^o \text{ παιχν. και } \quad '' \quad '' \quad '' \quad '' \end{array} \right) =$$

$= 1 - p - q + p \cdot P(\text{Μελ. στο } 0 \,/\, X_1 = 1) + q \cdot P(\text{Μελ. στο } 0 \,/\, X_1 = -1)$

$= 1 - p - q + p \cdot P(\text{φραγμ. απορ. στο} -1) + q \cdot P(\text{φραγμα απορ. στο} +1) =$

$$= \begin{cases} 1 - p - q + p \cdot 1 + q \cdot 1 - 1 = p + q - 1 & , S_0 = 0 \ (\mu = 0 \text{ ή } p = q) \\ 1 - p - q + p \cdot 1 + q \cdot e^{-\ln q/p} = 1 + p - q & , S_0 < 0 \ (\ln\frac{q}{p} > 0 \Rightarrow p > q) \\ 1 - p - q + p\, e^{\ln q/p} + q \cdot 1 = 1 + p - q & , S_0 > 0 \ (\ln\frac{q}{p} < 0 \Rightarrow p < q) \end{cases}$$